

Aula no 6

Potencial Eléctrico

O trabalho feito contra as forças
eléctricas para levar uma carga por um
determinado caminho é

$$W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

onde $\vec{F}$ é a força eléctrica sobre
a carga em cada ponto

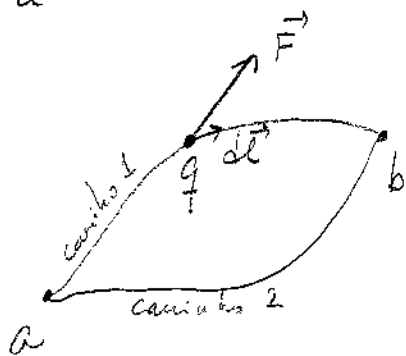


Fig. 1

O potencial elétrico é o trabalho por unidade de carga, desde que a força sobre a carga é numericamente igual ao campo elétrico:

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

Em geral a integral de caminho ^{que aparece} nas Eqs. (1) e (2) dependeria do parti-
cular caminho tomado para ir de $a \rightarrow b$
Isso significaria, por exemplo, que

$$W_{a \rightarrow b} \neq W_{b \rightarrow a}$$

Essa situação poderia acontecer se
 ao mover a carga ^{de prova} ~~na~~ ^{região} onde existe um campo elétrico $\vec{E}$
 (que aplica uma

força sobre a fonte de campo elétrico), a

configuração de carga que é fonte do
 campo elétrico também se moveria. Então

tanto, na eletrostática isso não acontece!

Nesse caso, as forças que aparecem entre
 a carga de prova e a fonte de
 campo elétrico são da forma da

lei de Coulomb. O campo elétrico $\vec{E}$ que aparece nessa situação tem também uma forma bem definida.

Como a força de Coulomb é conservativa

$$W_{a \rightarrow b} = W_{b \rightarrow a} \quad (3)$$

Ou de maneira geral, o trabalho $W_{a \rightarrow b}$ independente do ^{particular} caminho $a \rightarrow b$

Considere uma carga pontual q ,
 seja r a distância entre $\sqrt{\text{pontos}}$ a e b

O trabalho por unidade de carga, no

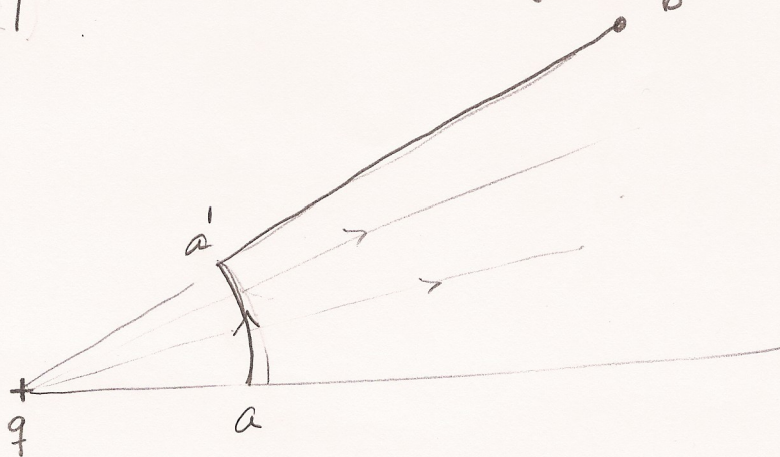


Fig. 1

caminho $\sqrt{\text{de } a \rightarrow b}$ mostrada na Fig. 1 (passando por a') pode ser calculado:

$$\begin{aligned}
 - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (4) \\
 &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_a^b
 \end{aligned}$$

Se tivermos utilizado os dois
caminhos mostrados na figura 2

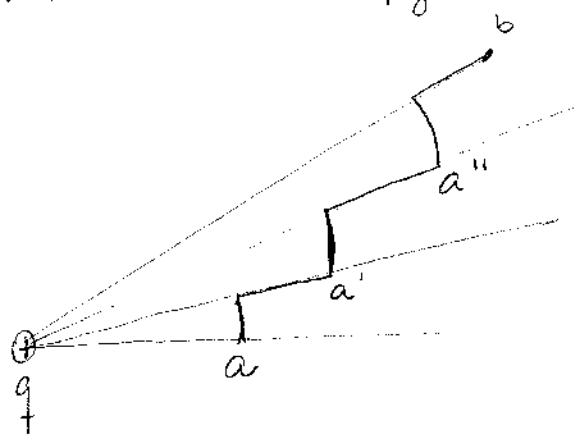


Fig. 2

a integral $-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ seria a mesma

encontrada na Eq. (4). Podemos concluir

que:

$$-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

para a carga pontual,

depende do caminho.

$a \rightarrow b$ no caso específico da

situação depicted nas Figs 1 e 2

Então

$$V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (5)$$

ou como já foi dito na aula anterior

$$V(P) = - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (6)$$

lembrando-se ^{campo elétrico} $\vec{E} = \frac{q}{\pi^2} \hat{r}$, então

$$V(x, y, z) = \frac{q}{\pi} \quad (7)$$

Atenção:

Distribuição contínua de carga ver aula 05, pag. 14.

Então podemos escrever, como para o
campo elétrico discutido na aula nº 5

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} \phi \quad (8)$$

Agora existe uma outra consequência
que pode ser extraída da Eq. (8). Pelo
Teorema de Stokes (ver aula nº 3, páj. 12,
Eq. 26). Como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (9)$$

ou como

$$\vec{E} = - \nabla \psi$$

(10)

Isso implica que

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

(11)

Juntando: isto é uma consequência
direta da eletrostática!

A eq. (11) junto com a
forma diferencial da lei de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad (12)$$

definem o campo elétrico para a

eletrostática

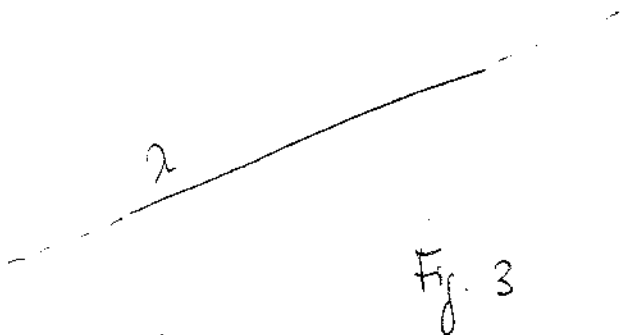
Exemplo

$$\phi(x, y, z) = \int_{\substack{\text{todas} \\ \text{as fontes}}} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} \quad (13)$$

Para um fio eletrizado

$$\phi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int_{r_1}^{r_2} \frac{2\lambda}{r} dr$$



Então

$$\varphi_{21} = -2\lambda \ln r_2 + \underbrace{2\lambda \ln r_1}_{\substack{\text{ponto de referencia } P_1 \text{ e} \\ \text{colocado em } r_1}} \quad (13)$$

ou

$$\varphi = -2\lambda \ln r_2 + \underline{cte} \quad (14)$$

Tomando o gradiente em coordenadas radiais

$$\vec{\nabla} \varphi = \hat{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \quad (15)$$

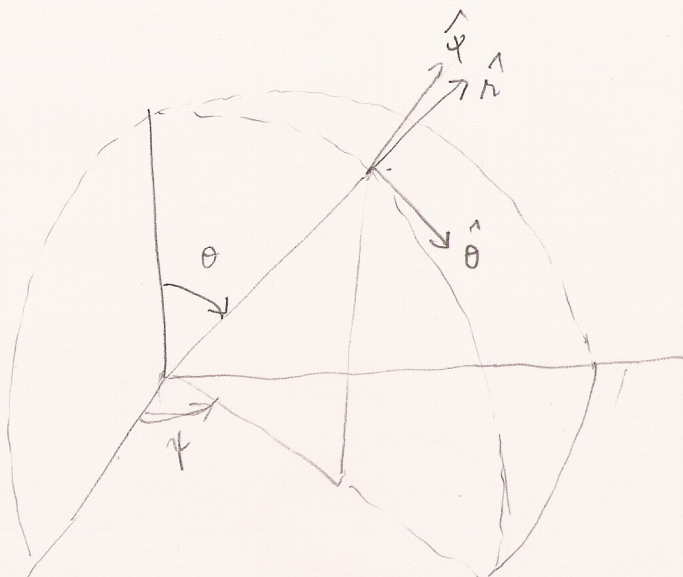


Fig. 4

$$- \vec{\nabla} \varphi = + \hat{r} \frac{2\lambda}{r} = \vec{E} \quad (16)$$

Recupera o campo elétrico $\vec{E}$ calculado
pela lei de Gauss.

Pelo princípio da superposição, podemos

escrever

$$\varphi(x, y, z) = \int_{\substack{\text{todas as} \\ \text{fontes}}} \frac{\varphi(x', y', z')}{r} dv' \quad (22)$$

com $dv' = dx' dy' dz'$ e

$$r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2} \quad (23)$$

arbitrando $\varphi|_{P_1} = 0$ e $\nabla \varphi|_{P_1} = 0$ no infinito.